

1 Familles sommables

Exercice 1 ★ Un exemple simple de famille sommable –

Démontrer que pour $|q| < 1$, la famille $(q^{|n|})_{n \in \mathbb{Z}}$ est sommable, et déterminer sa somme.

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[1955]

Exercice 2 ★ Exemples de familles non sommables –

Démontrer que les familles suivantes ne sont pas sommables :

1. $(\frac{1}{x^2})_{x \in \mathbb{Q} \cap [1, +\infty[}$;
2. $(a_{n,p})_{(n,p) \in \mathbb{N}^2}$, $a_{n,p} = \frac{1}{n^2 - p^2}$ si $n \neq p$ et $a_{n,n} = 0$.

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[1954]

Exercice 3 ★★ Avec un paramètre –

On pose, pour $(m, n) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$, $a_{m,n} = \frac{1}{(m+n)^\alpha}$ où $\alpha \in \mathbb{R}$ est un paramètre donné. Étudier la sommabilité de la famille $(a_{m,n})_{(m,n) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*}$.

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[1956]

Exercice 4 ★★ Sommabilité par permutation des sommes –

Soit $(a_p)_{p \geq 1}$ une suite de nombres complexes telle que la série $\sum_p a_p$ est absolument convergente. On pose $I = \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$ et pour $(n, p) \in I$, on pose $u_{n,p} = \frac{p}{n(n+1)} a_p$ si $p \leq n$, $u_{n,p} = 0$ sinon. Démontrer que la famille $(u_{n,p})_{(n,p) \in I}$ est sommable et calculer sa somme.

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[1958]

Exercice 5 ★★ Une somme double –

Démontrer l'existence et calculer $\sum_{(p,q) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*} \frac{1}{(p+q^2)(p+q^2+1)}$.

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[1961]

Exercice 6 ★★ Série des restes des factorielles –

Calculer $\sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k!}$.

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[1960]

Exercice 7 ★★ Calcul de sommes –

Calculer les sommes suivantes, après en avoir justifié l'existence.

$$\begin{array}{ll} 1. \sum_{p,q \geq 0} \frac{z^p}{q!}, |z| < 1 & 2. \sum_{p,q \geq 0} \frac{a^p b^q}{p! q!} \\ 3. \sum_{p,q \geq 0} \frac{q^p z^p}{p! q!} & \end{array}$$

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[3246]

Exercice 8 ★★ Série des restes de la série de Riemann –

1. Déterminer, pour $\alpha > 1$, un équivalent de $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha}$.
2. En déduire les valeurs de $\alpha \in \mathbb{R}$ pour lesquelles $\sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha}$ converge.

3. Retrouver ce résultat d'une autre façon, en démontrant de plus que pour ces valeurs de α ,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha} = \sum_{p \geq 1} \frac{1}{p^{\alpha-1}}.$$

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[1962]

Exercice 9 ★★★★★ Sommables ou non ? –

Les familles suivantes sont-elles sommables ?

$$\begin{array}{ll} 1. \left(\frac{1}{n^{\alpha p}} \right)_{n,p \geq 2}, \alpha \in \mathbb{R} & 2. \left(\frac{1}{np(n+p)} \right)_{n,p \geq 1} \\ 3. \left(\frac{1}{a^p + b^q} \right)_{p,q \in \mathbb{N}}, a, b > 0. & \end{array}$$

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[3245]

Exercice 10 ★★★★★ Réorganisation des termes –

Soit $x \in]-1, 1[$.

- Démontrer que la famille $(x^{kl})_{(k,l) \in (\mathbb{N}^*)^2}$ est sommable.
- En déduire que

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{x^k}{1-x^k} = \sum_{n=1}^{+\infty} d(n)x^n$$

où $d(n)$ est le nombre de diviseurs positifs de n .

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[1957]

Exercice 11 ★★★★★ Produit de convolution –

On note $\ell^1(\mathbb{Z})$ l'ensemble des familles de nombres complexes $u = (u_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ qui sont sommables. On définit sur $\ell^1(\mathbb{Z})$ une norme en posant $\|u\|$ la somme de la famille $(|u_n|)_{n \in \mathbb{Z}}$.

- Soit $u, v \in \ell^1(\mathbb{Z})$. Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{Z}$, la famille $(u_k v_{n-k})_{k \in \mathbb{Z}}$ est sommable.
- Pour $u, v \in \ell^1(\mathbb{Z})$, on définit la famille $u \star v$ par $(u \star v)_n = \sum_{k \in \mathbb{Z}} u_k v_{n-k}$ où $n \in \mathbb{Z}$. Démontrer que $u \star v \in \ell^1(\mathbb{Z})$, puis majorer $\|u \star v\|$ à l'aide de $\|u\|$ et de $\|v\|$.
- Démontrer que la loi \star agissant sur $\ell^1(\mathbb{Z})$ est une loi associative, commutative, et possédant un élément neutre.
- On définit $u \in \ell^1(\mathbb{Z})$ par $u_0 = 1$, $u_1 = -1$ et $u_n = 0$ sinon. Démontrer que u n'est pas inversible dans $\ell^1(\mathbb{Z})$ pour \star .

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[1959]

2 Produit de Cauchy

Exercice 12 ★★★★★ Somme d'une série et produit de Cauchy –

Soient $(a, b) \in \mathbb{C}^2$ tels que $|a| < 1$ et $|b| < 1$. Prouver que

$$\begin{cases} \frac{1}{(1-a)(1-b)} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a^{n+1} - b^{n+1}}{a-b} & \text{si } a \neq b, \\ \frac{1}{(1-a)^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)a^n & \text{si } a = b. \end{cases}$$

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[1158]

Exercice 13 Somme d'une série par produit de Cauchy –

Pour $n \geq 0$, on pose $w_n = 2^{-n} \sum_{k=0}^n \frac{4^k}{k!}$.

1. Montrer que la série de terme général w_n converge.
2. Calculer sa somme en utilisant le produit d'une série géométrique par une autre série classique.

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[1157]

Indication pour l'exercice 1 ▲

Couper \mathbb{Z} en deux.

Indication pour l'exercice 2 ▲

1. Il y a beaucoup de termes plus grands que $1/4$...
 - 2.
-

Indication pour l'exercice 3 ▲

Appliquer le théorème de sommation par paquets en regroupant les termes en fonction de la valeur de $m + n$.

Indication pour l'exercice 4 ▲

Utiliser le théorème de permutation des sommes, mais dans le bon sens !

Indication pour l'exercice 5 ▲

Faire deux sommations, dans le bon ordre. On pourra utiliser le fait qu'une des deux sommes est télescopique.

Indication pour l'exercice 6 ▲

Permuter l'ordre des sommations.

Indication pour l'exercice 7 ▲

Pour les deux premières sommes, appliquer le théorème de Fubini. Pour la troisième, appliquer le théorème de permutation de l'ordre des termes, en commençant par sommer sur p .

Indication pour l'exercice 8 ▲

1. Comparaison à une intégrale !
 - 2.
 3. Théorème de permutation des sommes.
-

Indication pour l'exercice 9 ▲

1. Se ramener à $\alpha > 0$ et utiliser le théorème de permutation des sommes.
 2. Utiliser le théorème de permutation des sommes. On pourra se ramener à une série télescopique pour la somme sur p .
 3. On pourra utiliser que $x + y \geq 2\sqrt{xy}$ si $x \geq 0$ et $y \geq 0$.
-

Indication pour l'exercice 10 ▲

1. Démontrer que la famille $(|x|^{kl})_{(k,l) \in \mathbb{N}^2}$ est sommable.
 2. Calculer la somme de la famille sommable de deux façons : l'une par des sommations successives, l'autre en regroupant judicieusement certains termes.
-

Indication pour l'exercice 11 ▲

1. La famille (v_n) est majorée.
 - 2.
 - 3.
 - 4.
-

Indication pour l'exercice 12 ▲

Écrire $\frac{1}{1-a}$ comme somme d'une série, puis faire le produit de Cauchy des deux séries.

Indication pour l'exercice 13 ▲

1. Majorer w_n . On pourra reconnaître dans la somme le début de $\exp(4)$.
 2. Écrire le produit de Cauchy de $\left(\sum_{k \geq 0} \frac{b^k}{k!}\right)$ et de $\sum_{k \geq 0} a^k$.
-

Correction de l'exercice 1 ▲

Écrivons que $\mathbb{Z} = \mathbb{Z}_-^* \cup \mathbb{N}$. Démontrer la sommabilité de la famille $(q^{|n|})_{n \in \mathbb{Z}}$ revient à démontrer la sommabilité des deux familles $(q^{|n|})_{n \geq 0}$ et $(q^{|n|})_{n < 0}$. Puisque \mathbb{Z}_-^* et \mathbb{N} peuvent être facilement mis en bijection avec \mathbb{N} , il s'agit de démontrer que les deux séries $\sum_{n \in \mathbb{N}} q^n$ et $\sum_{n \geq 1} q^{|-n|}$ convergent absolument. C'est bien le cas puisqu'on a deux séries géométriques de raison dont le module est strictement inférieur à 1. Pour la somme, on a

$$\begin{aligned} \sum_{n \in \mathbb{Z}} q^{|n|} &= \sum_{n \geq 0} q^n + \sum_{n \geq 1} q^n \\ &= 2 \sum_{n \geq 0} q^n - 1 \\ &= \frac{2}{1-q} - 1 = \frac{1+q}{1-q}. \end{aligned}$$

Correction de l'exercice 2 ▲

1. Il y a une infinité de termes dans $\mathbb{Q} \cap [1, 2]$. En particulier, il y a une infinité de termes de la famille qui sont supérieurs à $1/4$. Ceci entraîne que la famille n'est pas sommable, ce qu'on peut retrouver en utilisant la définition. Si chaque somme finie de la série était majorée par M , il suffirait de prendre un ensemble fini F de $\mathbb{Q} \cap [1, 2]$ contenant strictement plus de $4M$ éléments pour obtenir

$$\sum_{x \in F} \frac{1}{x^2} > M,$$

ce qui est une contradiction.

2. Si la famille était sommable, toute sous-famille serait sommable. Prenons $I = \{(n+1, n); n \in \mathbb{N}\}$. La famille $(a_{n,m})_{(n,m) \in I} = (a_{n+1,n})_{n \in \mathbb{N}}$ serait donc sommable. Ceci serait équivalent à la convergence de la série

$$\sum_n a_{n+1,n} = \sum_n \frac{1}{2n+1}.$$

Cette dernière série n'étant pas convergente, la famille n'est pas sommable.

Correction de l'exercice 3 ▲

Notons $I = \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$ et pour $p \geq 2$, $I_p = \{(m, n) \in I; m+n = p\}$. Alors $(I_p)_{p \geq 2}$ est une partition de I . De plus, I_p a pour cardinal $p-1$ et on a donc

$$\sum_{i \in I_p} a_i = \frac{p-1}{p^\alpha}.$$

Par le théorème de sommation par paquets, la convergence de la série $\sum_i a_i$ est équivalent à la convergence de la série $\sum_p \left(\sum_{i \in I_p} a_i \right) = \sum_p \frac{p-1}{p^\alpha}$. Par comparaison à une série de Riemann, cette dernière série converge si et seulement si $\alpha > 2$. La famille est sommable si et seulement si $\alpha > 2$.

Correction de l'exercice 4 ▲

Par le théorème de permutation des sommes, il suffit de prouver que, pour tout $p \geq 1$, la série $\sum_n |u_{n,p}|$ est convergente, et que la série $\sum_p \left(\sum_{n \geq 1} |u_{n,p}| \right)$ est convergente. Soit donc $p \geq 1$. Alors :

$$\sum_{n \geq 0} |u_{n,p}| = \sum_{n \geq p} \frac{p|a_p|}{n(n+1)} = p|a_p| \sum_{n \geq p} \frac{1}{n(n+1)} = |a_p|$$

où la dernière égalité vient de l'écriture $\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$ et du fait qu'on réalise une somme télescopique. La série $\sum_n |u_{n,p}|$ est donc bien convergente de somme $|a_p|$. Puisque la série $\sum_p a_p$ est absolument convergente, on a bien prouvé que la famille était sommable et sa somme est précisément la somme de la série $\sum_p a_p$.

Correction de l'exercice 5 ▲

On doit montrer la sommabilité de la famille et calculer sa somme. Pour cela, il suffit de prouver que, pour tout $q \in \mathbb{N}^*$, la série $\sum_p \frac{1}{(p+q^2)(p+q^2+1)}$ converge, puis que la série $\sum_q \sum_{p \geq 0} \frac{1}{(p+q^2)(p+q^2+1)}$. La somme de la famille sera alors égale la somme de cette dernière série. Mais, pour tout $q \in \mathbb{N}^*$, on a

$$\frac{1}{(p+q^2)(p+q^2+1)} = \frac{1}{p+q^2} - \frac{1}{p+q^2+1}$$

et donc

$$\sum_{p=0}^N \frac{1}{(p+q^2)(p+q^2+1)} = \frac{1}{q^2} - \frac{1}{N+q^2+1}.$$

On en déduit la convergence de la série $\sum_p \frac{1}{(p+q^2)(p+q^2+1)}$ et de plus

$$\sum_{p \geq 0} \frac{1}{(p+q^2)(p+q^2+1)} = \frac{1}{q^2}.$$

Ceci est le terme général d'une série convergente, et on a

$$\sum_{(p,q) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*} \frac{1}{(p+q^2)(p+q^2+1)} = \sum_{q \geq 1} \frac{1}{q^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

Correction de l'exercice 6 ▲

On va permuter l'ordre des séries. Pour cela, il suffit de prouver que la famille $(\frac{1}{k!})_{(n,k) \in I}$ où $I = \{(n,k) \in \mathbb{N}^2; k \geq n\}$ est sommable. S'agissant d'une famille dont tous les termes sont positifs, il suffit de vérifier que la série

$$\sum_{k \geq 0} \left(\sum_{n \leq k} \frac{1}{k!} \right)$$

converge (remarquons qu'à l'intérieur, la somme est finie). Mais,

$$\left(\sum_{n \leq k} \frac{1}{k!} \right) = \frac{k+1}{k!}$$

qui est le terme général d'une série convergente, et on a

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k!} = \sum_{k \geq 0} \frac{(k+1)}{k!} = 2e.$$

Correction de l'exercice 7 ▲

1. On a $\frac{z^p}{q!} = z^p \times \frac{1}{q!}$ et donc on voit apparaître une famille sommable "produit". Puisque la famille $(z^p)_{p \in \mathbb{N}}$ est sommable et que la famille $(\frac{1}{q!})_{q \in \mathbb{N}}$ est sommable, il en est de même de la famille initiale et

$$\sum_{p,q \geq 0} \frac{z^p}{q!} = \left(\sum_{p \geq 0} z^p \right) \left(\sum_{q \geq 0} \frac{1}{q!} \right) = \frac{e}{1-z}.$$

2. On raisonne exactement de la même façon et on trouve

$$\sum_{p,q \geq 0} \frac{a^p b^q}{p! q!} = \left(\sum_{p \geq 0} \frac{a^p}{p!} \right) \left(\sum_{q \geq 0} \frac{b^q}{q!} \right) = e^a e^b.$$

3. On commence par montrer la sommabilité de la famille en utilisant le théorème de permutation des sommes. On a, pour $q \geq 0$,

$$\sum_{p \geq 0} \frac{q^p |z|^p}{p!} = \exp(q|z|) = (\exp(|z|))^q.$$

Cela entraîne que

$$\sum_{q \geq 0} \sum_{p \geq 0} \frac{q^p |z|^p}{q! p!} = \sum_{q \geq 0} \frac{(\exp(|z|))^q}{q!} = \exp(\exp(|z|)).$$

Ceci prouve que la famille est sommable. Reprenant le même calcul mais sans les modules, on trouve

$$\sum_{p, q \geq 0} \frac{q^p z^p}{q! p!} = \exp(\exp(z)).$$

Correction de l'exercice 8 ▲

1. C'est très classique, il suffit de comparer à une intégrale. En effet, pour $k \geq 2$, on a

$$\int_k^{k+1} \frac{dt}{t^\alpha} \leq \frac{1}{k^\alpha} \leq \int_{k-1}^k \frac{dt}{t^\alpha}.$$

En sommant cette inégalité pour k allant de $n+1$ à $+\infty$, et en calculant les intégrales résultantes, on trouve

$$\frac{1}{(\alpha-1)(n+1)^{\alpha-1}} \leq R_n \leq \frac{1}{(\alpha-1)n^{\alpha-1}}$$

et donc

$$R_n \sim_{+\infty} \frac{1}{(\alpha-1)n^{\alpha-1}}.$$

2. Pour que la série à l'intérieur converge, il est nécessaire et suffisant que $\alpha > 1$. On a alors trouvé un équivalent de cette somme, et pour que la série à l'extérieur converge, il est alors nécessaire et suffisant que $\alpha > 2$. On peut donc donner un sens à cette expression si et seulement si $\alpha > 2$.

3. Comme les termes de la famille sont positifs, démontrer que cette expression a un sens revient à prouver que la famille est sommable, ou encore que l'on peut donner un sens à la double somme "permutée", c'est-à-dire à

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \sum_{n < k} \frac{1}{k^\alpha}.$$

Mais la somme à l'intérieur vaut $\frac{1}{k^{\alpha-1}}$ et on est ramené à l'étude de la série $\sum_k \frac{1}{k^{\alpha-1}}$ qui converge si et seulement si $\alpha > 2$. Dans ce cas, on a

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha} = \sum_{k=1}^{+\infty} \sum_{n < k} \frac{1}{k^\alpha} = \sum_{k \geq 1} \frac{1}{k^{\alpha-1}}.$$

Correction de l'exercice 9 ▲

1. Remarquons d'abord que si $\alpha \leq 0$, alors $\frac{1}{n^{\alpha p}} \geq 1$, ce qui empêche la famille d'être sommable. Supposons donc $\alpha > 0$. On va utiliser le théorème de permutation des sommes. On commence par remarquer que

$$\sum_{p \geq 2} \frac{1}{n^{\alpha p}} = \frac{\frac{1}{n^{2\alpha}}}{1 - \frac{1}{n^\alpha}} \sim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^{2\alpha}}.$$

La série $\sum \frac{1}{n^{2\alpha}}$ converge si et seulement si $\alpha > 1/2$ et donc la famille est sommable si et seulement si $\alpha > 1/2$.

2. On va utiliser le théorème de permutation des sommes. Soit $n \geq 1$. Alors on a

$$\frac{1}{p(n+p)} = \frac{1}{n} \times \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{p+n} \right).$$

On a donc une série télescopique et

$$\sum_{p \geq 1} \frac{1}{p(n+p)} = \frac{1}{n} \left(1 + \dots + \frac{1}{n} \right).$$

Il s'agit donc maintenant d'étudier la convergence de

$$\sum \frac{1}{n^2} \left(1 + \dots + \frac{1}{n} \right).$$

En utilisant l'estimation bien connue

$$1 + \dots + \frac{1}{n} \sim_{n \rightarrow +\infty} \ln(n)$$

on obtient

$$\frac{1}{n^2} \left(1 + \dots + \frac{1}{n} \right) \sim_{+\infty} \frac{\ln(n)}{n^2}$$

et puisque $\frac{\ln(n)}{n^2} = O\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right)$, la série est convergente. Donc la famille est sommable.

3. On commence par remarquer que si $a \leq 1$, la famille n'est pas sommable. En effet, la sous-famille $\left(\frac{1}{a^p + b^q}\right)_{(p,q) \in I}$ où $I = \{(p, 1) : p \in \mathbb{Z}\}$ n'est pas sommable puisque la série

$$\sum \frac{1}{a^p + 1}$$

n'est pas convergente. De même, si $b \leq 1$, la famille n'est pas sommable. On peut donc supposer $a > 1$ et $b > 1$. Dans ce cas, puisque $x + y \geq 2\sqrt{xy}$ pour tout $x, y \geq 0$ (développer $(\sqrt{x} - \sqrt{y})^2$), on sait que

$$\frac{1}{a^p + b^q} \leq \frac{1}{2a^{p/2}b^{q/2}}.$$

Mais

$$\sum_{p,q \in \mathbb{N}} \frac{1}{a^{p/2}b^{q/2}} = \left(\sum_{p \in \mathbb{N}} \frac{1}{a^{p/2}} \right) \left(\sum_{q \in \mathbb{N}} \frac{1}{b^{q/2}} \right) < +\infty$$

puisque $\sqrt{a}, \sqrt{b} > 1$. Finalement, on a prouvé que la famille est sommable.

Correction de l'exercice 10 ▲

1. Il suffit, par le théorème de permutation des sommes, de démontrer que, pour chaque $k \geq 1$, la série $\sum_l |x|^{kl}$ converge, et que la série $\sum_k \sum_{l \geq 1} |x|^{kl}$ est aussi convergente. Mais, puisque $|x| < 1$, la première série converge, de somme

$$\sum_{l \geq 1} x^{kl} = \frac{|x|^k}{1 - |x|^k}.$$

Maintenant,

$$\frac{|x|^k}{1 - |x|^k} \sim_{k \rightarrow +\infty} |x|^k$$

et donc la série $\sum_{k \geq 1} \frac{|x|^k}{1 - |x|^k}$ est convergente.

2. Calculons de deux façons différentes la somme de la famille sommable. D'une part, en procédant par sommation successive comme dans la question précédente, on a

$$\sum_{(k,l) \in (\mathbb{N}^*)^2} x^{kl} = \sum_{k \geq 1} \frac{x^k}{1 - x^k}.$$

D'autre part, posons, pour $n \geq 1$, $I_n = \{(k, l); k \cdot l = n\}$. Alors on a aussi

$$\sum_{(k,l) \in (\mathbb{N}^*)^2} x^{kl} = \sum_{n \geq 1} \sum_{(k,l) \in I_n} x^{kl} = \sum_{n \geq 1} \text{card}(I_n) x^n.$$

Mais le cardinal de I_n est justement le nombre de diviseurs de n (on peut choisir pour k n'importe quel diviseur positif de n , et ceci définit aussi uniquement l).

Correction de l'exercice 11 ▲

1. Puisque $(v_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ est sommable, la famille $(|v_n|)$ est majorée. Il existe donc une constante $M > 0$ telle que, pour tous les entiers k et n , $|u_k v_{n-k}| \leq M |u_k|$. Puisque $(u_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ est sommable, il en est de même de $(u_k v_{n-k})_{k \in \mathbb{Z}}$.

2. Pour chaque $k \in \mathbb{Z}$, la famille $(|u_k v_{n-k}|)_{n \in \mathbb{Z}}$ est sommable, de somme $\sum_{n \in \mathbb{Z}} |u_k| \cdot |v_{n-k}| = |u_k| \sum_{n \in \mathbb{Z}} |v_n|$. La famille $(|u_k| \sum_{n \in \mathbb{Z}} |v_n|)_{k \in \mathbb{Z}}$ est elle-même sommable, de somme $\sum_{k \in \mathbb{Z}} |u_k| \sum_{n \in \mathbb{Z}} |v_n|$. Ainsi, la famille $(u_k v_{n-k})_{(k,n) \in \mathbb{Z}^2}$ est sommable, de somme $\sum_{k \in \mathbb{Z}} u_k \sum_{n \in \mathbb{Z}} v_n$. On en déduit que la famille $(\sum_{k \in \mathbb{Z}} u_k v_{n-k})_{n \in \mathbb{Z}}$ est sommable, de même somme. Finalement, en prenant partout des modules, on a

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} \sum_{k \in \mathbb{Z}} |u_k v_{n-k}| = \sum_{k \in \mathbb{Z}} |u_k| \sum_{n \in \mathbb{Z}} |v_n|.$$

On en déduit que

$$\|u \star v\| = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \left| \sum_{k \in \mathbb{Z}} u_k v_{n-k} \right| \leq \sum_{n \in \mathbb{Z}} \sum_{k \in \mathbb{Z}} |u_k v_{n-k}| = \|u\| \times \|v\|.$$

3. On peut remarquer que $(u \star v)_n = \sum_{k+l=n} u_k v_l$. On en déduit immédiatement la commutativité. Pour l'associativité, il suffit d'écrire

$$((u \star v) \star w)_n = \sum_{k+l+m=n} u_k v_l w_m = (u \star (v \star w))_n.$$

L'élément neutre est donné par la suite δ vérifiant $\delta_0 = 1$ et $\delta_n = 0$ sinon.

4. Imaginons que u soit inversible et notons v son inverse. Alors $(u \star v)_n = v_n - v_{n-1}$. Pour $n \geq 1$, on obtient $v_n = v_{n-1}$ et finalement $v_n = v_0$. Mais puisque (v_n) est sommable, ceci entraîne que $v_0 = 0$. Pour $n = 0$, on a $v_0 - v_{-1} = 1$, et donc $v_{-1} = -1$. Enfin, pour $n \leq -1$, on a à nouveau $v_{n-1} = v_n$, ce qui entraîne que $v_n = v_{-1} = -1$ pour tout $n < 0$. Ce n'est pas possible, car ceci contredit que $(v_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ est sommable.

Correction de l'exercice 12 ▲

D'après la formule classique pour les séries géométriques, on a

$$\frac{1}{1-a} = \sum_{n \geq 0} a^n \text{ et } \frac{1}{1-b} = \sum_{n \geq 0} b^n.$$

Ces deux séries sont absolument convergentes puisque $|a| < 1$ et $|b| < 1$. On peut faire le produit de Cauchy et donc on obtient que

$$\frac{1}{1-a} \times \frac{1}{1-b} = \sum_{n \geq 0} w_n \text{ avec } w_n = \sum_{k=0}^n a^k b^{n-k}.$$

Si $a = b$, on trouve directement que $w_n = \sum_{k=0}^n a^n = (n+1)a^n$. Si $a \neq b$, alors il faut utiliser la factorisation

$$a^{n+1} - b^{n+1} = (a-b) \times \sum_{k=0}^n a^k b^{n-k}$$

qui donne le résultat. Dans le cas où $a \neq b$, on peut très facilement conclure sans utiliser le produit de Cauchy, en calculant séparément la somme de chaque série géométrique $\sum_{n \geq 0} a^{n+1}$ et $\sum_{n \geq 0} b^{n+1}$.

Correction de l'exercice 13 ▲

L'exercice repose sur la définition de l'exponentielle par une série : pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a

$$\exp(x) = \sum_{n \geq 0} \frac{x^n}{n!}.$$

1. Pour chaque $n \geq 0$, w_n est positif et satisfait

$$w_n \leq 2^{-n} \exp(4).$$

Puisque la série de terme général $2^{-n} \exp(4)$ est convergente, il en est de même de la série de terme général w_n .

2. Écrivons le produit de Cauchy de $\sum_{k \geq 0} \frac{b^k}{k!}$ par $\sum_{k \geq 0} a^k$, où a et b sont des réels avec $|a| < 1$. Ces deux séries sont absolument convergentes, et on a :

$$\exp(b) \times \frac{1}{1-a} = \left(\sum_{k \geq 0} \frac{b^k}{k!} \right) \times \left(\sum_{k \geq 0} a^k \right) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n$$

où u_n est défini par

$$u_n = \sum_{k=0}^n \frac{b^k}{k!} a^{n-k} = a^n \sum_{k=0}^n \frac{(b/a)^k}{k!}.$$

Pour $a = 1/2$ et $b = 2$, on trouve $w_n = u_n$. Ainsi, on a

$$\sum_{n \geq 0} w_n = \exp(2) \times \frac{1}{1-1/2} = 2 \exp(2).$$
